CENTRO DE CAPACITACION
Secundarios - CBC - Universitarios - Informática - Idiomas

DELFOS
CENTRO DE CAPACITACION

Apunte Nº 172

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

(El tema está aplicado al caso particular de una función de 4 variables y dos restricciones).

Si se desea optimizar $f_{(x,y,z,w)}$ sujeta a dos restricciones $g_{1(x,y,z,w)} = 0$; $g_{2(x,y,z,w)} = 0$

Primer paso: armar el lagrangeano

$$L_{(x,y,z,w,\lambda_1\lambda_2)} = f_{(x,y,z,w)} + \lambda_1 . g_{1(x,y,z,w)} + \lambda_2 . g_{2(x,y,z,w)}$$

Condición de primer orden (condición necesaria)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial w} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$$

Condición de segundo orden (condición suficiente).

- **Primer método (Hessiano, forma libre)**

$$\begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{array} \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & L_{xw} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} & L_{yw} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} & L_{zw} \\ L_{xw} & L_{yw} & L_{zw} & L_{ww} \end{vmatrix}$$

Se calculan todos estos determinantes

	Definida Positiva	Semi-definida Positiva	Definida Negativa	Semi-definida Negativa	Indefinida
H1	>0	>0	<0	<0	Otras opciones
H2	>0	>0	>0	>0	
H3	>0	>0	<0	<0	
H4	>0	=0	>0	=0	

- **Segundo méodo (diferencial de segundo orden)**

Se realiza el planteo matricial del diferencial de segundo orden. Y a la matriz resultante se la aplica el mismo análisis de signos de determinantes que en el primer método.

Av. Santa Fe 2206 – Piso 2° - Capital Federal C1123AAR - Argentina
Horario de atención: Lunes a Viernes de 8:30 a 23:00 hs. / Sábado de 9:00 a 21:00 hs.
Tel/Fax.: 4823-9334 / 4821-3353 (Líneas Rotativas)
E-mail: info@delfosweb.com.ar Web: www.delfosweb.com.ar

Apunte Nº 172

$$(dx \quad dy \quad dz \quad dw).\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & L_{xw} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} & L_{yw} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} & L_{zw} \\ L_{xw} & L_{yw} & L_{zw} & L_{ww} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dw \end{pmatrix}$$

Es necesario establecer qué relaciones cumplen los diferenciales entre sí. Las mismas se obtienen calculando los diferenciales totales de las restricciones. Es decir

$dg = g'_x.dx + g'_y.dy + g'_z.dz + g'_w.dw = 0$; tanto para g_1 como para g_2.

Para ser mas claros veamos un ejemplo. Supongamos que de calcular ambos diferenciales queda que:

$$\left.\begin{matrix} 4.dx + 2.dy - dz = 0 \\ 2.dx + 6.dy + dw = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} dz = 4.dx + 2.dy \\ dw = -2.dx - 2.dy \end{matrix}\right.$$

Podemos entonces expresar un vector genérico de los diferenciales en cuestión:

$$(dx \quad dy \quad dz \quad dw) = (dx \quad dy \quad 4.dx + 2.dy \quad -2.dx - 2.dy)$$

$$= dx.(1 \quad 0 \quad 4 \quad -2) + dy.(0 \quad 1 \quad 2 \quad -2)$$

Con lo cual se arma la siguiente matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Y finalmente ingresamos estas condiciones a la expresión matricial del diferencial de segundo orden planteado al inicio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & L_{xw} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} & L_{yw} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} & L_{zw} \\ L_{xw} & L_{yw} & L_{zw} & L_{ww} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

De aquí surge una matriz de 2x2 a la cual se le aplica el mismo criterio de signos que en el primer método.

- ## Tercer método (Hessiano Orlado)

Se definen dos parámetros:
n= cantidad de variables de la función $f_{(x,y,z,w)}$
m=cantidad de restricciones

Se calcularán “n-m” determinantes del Hessiano Orlado; en este caso el valor de n es 4, y el valor de m es 2. De esta forma se deberán calcular (4-2=2) determinantes.

Apunte Nº 172

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ H_5 \\ H_6
\end{array}
\left|\begin{array}{cc:ccc:c}
0 & 0 & g^1{}_x & g^1{}_x & g^1{}_x & g^1{}_x \\
0 & 0 & g^2{}_x & g^2{}_x & g^2{}_x & g^2{}_x \\
\hdashline
g^1{}_x & g^2{}_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & L_{xw} \\
g^1{}_x & g^2{}_x & L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} & L_{yw} \\
g^1{}_x & g^2{}_x & L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} & L_{zw} \\
\hdashline
g^1{}_x & g^2{}_x & L_{xw} & L_{yw} & L_{zw} & L_{ww}
\end{array}\right|
$$

Se calculan todos estos dos determinantes

Para que sea Definida Positva:
Se debe verificar que el primer determinante calculado tenga el signo correspondiente a la siguiente operación: $(-1)^m$.
Y también se pide que los restantes determinantes (en este caso H_6 únicamente) mantengan el mismo signo.
Ojo: si alguno vale cero, será Semi Definida Positiva.

Para que sea Definida Negativa:
Se debe verificar que el primer determinante calculado tenga el signo correspondiente a la siguiente operación: $(-1)^{m+1}$.
Y también se pide que los restantes determinantes (en este caso H_6 únicamente) vayan cambiando de signo alternativamente.
Ojo: si alguno vale cero, será Semi Definida Negativa.

Entonces, para este caso, teniendo en cuenta que n=2:

Signo de$(-1)^m$: +	Signo de $(-1)^{m+1}$: -

	Definida Positiva	Semi-definida Positiva		Definida Negativa	Semi-definida Negativa	
H_5	>0	>0	=0	<0	<0	=0
H_6	>0	=0	>0	>0	=0	>0

Para toda otra opción será Indefinida.

- **Tercer método (Similar al cálculo de autovalores)**

$$
\left|\begin{array}{cc:cccc}
0 & 0 & g^1{}_x & g^1{}_x & g^1{}_x & g^1{}_x \\
0 & 0 & g^2{}_x & g^2{}_x & g^2{}_x & g^2{}_x \\
\hdashline
g^1{}_x & g^2{}_x & (L_{xx}-\mu) & L_{xy} & L_{xz} & L_{xw} \\
g^1{}_x & g^2{}_x & L_{xy} & (L_{yy}-\mu) & L_{yz} & L_{yw} \\
g^1{}_x & g^2{}_x & L_{xz} & L_{yz} & (L_{zz}-\mu) & L_{zw} \\
g^1{}_x & g^2{}_x & L_{xw} & L_{yw} & L_{zw} & (L_{ww}-\mu)
\end{array}\right|
$$

Se calcula el determinante de esta matriz (quedará en función de μ). Quedará un "*polinomio característico*" al cual se le calculan las raices.

El criterio a emplear es el siguiente:

Y se aplica el siguiente criterio para determinar la concavidad. Aplicado para todos los valores de μ_i.

$\mu_i > 0$	Definida Positiva
$\mu_i \geq 0$	Semidefinida Positiva
$\mu_i < 0$	Definida Negativa
$\mu_i \leq 0$	Semidefinida Negativa
$\mu_i = 0$	Indefinida