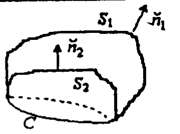
Apunte nº 625 — *Temas de coloquio de Análisis Matemático II*

Tema 10

1) Sea $\bar{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ un campo de gradientes y ϕ su función potencial con laplaciano $\nabla^2\phi = k$ (constante). Considere dos superficies suaves abiertas S_1 y S_2 con curva frontera C común y orientadas según se indica en la figura. Llamando V al volumen del cuerpo delimitado por dichas superficies, demuestre que



$$\iint_{S_1} \bar{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma = k\,V + \iint_{S_2} \bar{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma$$

2) Sean la función escalar $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $h(x,y) = f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$. Demuestre que $x h'_x + y h'_y = 0 \ \forall (x,y) \in D$ (dominio de h).

3) El campo $\bar{f}(x,y,z) = \left(y\ ,\ x+2yz\ ,\ y^2\right)$ tiene función potencial $\phi / \phi(1,1,2) = 5$, halle una ecuación paramétrica vectorial para el plano tangente a la superficie equipotencial $\phi(x,y,z) = 0$ en el punto $(2\,,2\,,z_0)$ de la misma.

4) Calcule la masa del cuerpo definido por $z \ge 2x^2 + y^2$, $x+z \le 3$, 1° octante, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xz.

5) Dado el campo $\bar{f}(x,y,z) = \left(zy+ax\ ,\ x^2+by\ ,\ yz+cz\right)$ con a,b,c constantes, calcule la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva intersección de $x^2+z^2 = 4z$ con el plano $y = 3$ con la orientación $(0,3,0)\to(2,3,2)\to(0,3,4)\to(-2,3,2)\to(0,3,0)$.

Tema 11

1) Sea $f \in C^n$ en un entorno de $\bar{A} = (x_0\,,y_0)$, si $p(x,y)$ es el polinomio de Taylor para orden $n \ge 2$ en dicho punto, demuestre que, analizando extremos, las clasificaciones de $f(\bar{A})$ y de $p(\bar{A})$ mediante el criterio del Hessiano son coincidentes.

2) Dada $z = f(x+ay) + g(x-ay)$ demuestre que $a^2 z''_{xx} - z''_{yy} = 0$.

3) Considere el plano π_1 tangente en $(3,1,4)$ a la superficie de ecuación $\bar{X} = \left(u+v\ ,u-v^2\ ,\ 2u\right)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y el plano π_2 tangente en $(2,1,2)$ a la sup. de ec. $z = x^2 - 2y$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Halle el punto en que la recta común a ambos planos interseca al plano $y = 2x$.

4) Calcule el flujo del campo $\bar{f}(x,y,z) = \left(xy\ ,\ 2y-z\ ,\ z-x^2\right)$ a través de una superficie esférica de radio R con centro en $\bar{0}$.

5) Calcule la integral de línea de $\bar{f}(x,y,z) = (xy\ ,\ x\ ,\ zx)$ a lo largo de la curva intersección de $z = x^2 + y$ con $x+z = 2$ en el 1° octante, desde $(0,2,2)$ hasta $(1,0,1)$.

Tema 12

1) Sea $\bar{g} = (g_1\,,g_2) \in C^1$ tal que $x g_2(x,y) = y g_1(x,y)$. Si se define $\bar{f}(x,y) = \bar{g}(x,y)/\left(x^2+y^2\right)$, demuestre que $\bar{f}$ es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$ si, y sólo si, $\bar{g}$ es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$.

2) Sea $\bar{f}(x,y,z) = \left(2xy+z\ ,\ x^2-z\ ,\ x-y\right)$ un campo de gradientes con función potencial U tal que $U(1,1,1) = 3$. Determine las ecuaciones de las superficies equipotenciales que admiten algún plano tangente paralelo al plano $y = 2-2x$, los puntos de dichas superficies en los que se cumple esta propiedad, y el potencial de dichos puntos.

3) Calcule la integral doble de $f(x,y) = \left(2yx^{-3} + x^{-2}\right)e^{2y/x^2}$ en la región plana delimitada por $y \ge x^2$, $y \le 5x^2$, $y \le 6-x$, $x \ge 1/2$, aplicando la transformación definida por $(u\,,v) = \left(y/x^2\ ,\ x+y\right)$.

4) Calcule el volumen del cuerpo definido por $y \ge 2x$, $x+y+z = 3$, $x+y+z = 6$, en el 1° octante.

5) Determine el valor de la constante k tal que el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (kxy\ ,\ x\ ,\ kzy)$ a través del trozo de cilindro de ecuación $y = x^2$ con $y \le 4$, $0 \le z \le 2$ resulte 128. Considere versor normal tal que $\breve{n}(\bar{0})\cdot\breve{j} < 0$.