2.5. Coloquio 12/08/03.

Análisis II - Primer Parcial
Coloquio- Tema 1

1. Hallar a de manera que sea máximo el flujo de campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del borde (¡con tapas!) del cilindro elíptico descripto por

$$\frac{x^2}{1-\frac{4a^2}{1+4a^2}}+\frac{y^2}{1+\frac{4a^2}{1+4a^2}} \le z \le 1$$

2. Sea F un campo vectorial C^2, $F(x,y,z) = (xP(x,y,z), yQ(x,y,z), z)$, y sea S el semicírculo en el plano $y = 0$ descripto por $y = 0$, $x^2 + z^2 \le 1, x \ge 0$. Si el flujo del rotor de F a través de S orientado de manera que su normal tenga coordenada y positiva es 4, hallar la circulación de F a lo largo del arco de circunferencia parametrizado por $\sigma(t) = (\text{sen}(t), 0, -\cos(t))$ con t desde 0 hasta π.

3. Calcular el área del trozo de superficie definido por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y2 - 2y \le 0$$

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

   a. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 tal que su polinomio de Taylor de grado 2 en (2,1) es $p(x,y) = 5(x-2) + (y-1) + (x-2)^2 + (y-1)^2$

Hallar a y b en R de manera que $g(x,y) = f(x,y) - ax - by$ tenga mínimo en (2,1). ¿Cuánto vale el mínimo?

   b. Sea C una curva regular en $\mathbb{R}^2$, positivamente orientada, que encierra una región R de área 4. Calcular $\int_C dx + Qdy$ siendo $P(x,y) = 3x^2y + 5$, $Q(x,y) = x^3 - 4x - 3$.

5. Sea C una curva regular en R^2, que pase por (1,2) y sea ortogonal a todas las curvas de nivel de la función definida por $f(x,y) = 2x^3 + y$.

2.5. Coloquio 12/08/03.

Análisis II
Coloquio
01/07/03

1. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z),2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset R^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. suponiendo que $\iiint_D \nabla \cdot F \, dx\, dy\, dz = 3$, siendo D la región descripta por $0 \le z \le 1$, $x^2 + y^2 \le 1$, calcular el flujo de F a través de S siendo S la superficie cilíndrica (¡sin tapas!) descripta, en coordenadas cilíndricas, por $\rho = 1, 0 \le z \le 1$, orientada de manera que el vector normal e dirija hacia fuera del cilindro.

2. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z),2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset R^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en R, calcular la circulación de F a lo largo de la curva parametrizada por (sen t, 1, cos t) , con t variando desde 0 hasta π.

3. Sea $R \subset R^3$ la región descripta por $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 - 2y \ge 0$. Hallar el área de la proyección de R sobre el plano yz.

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.
   a) El plano tangente en el punto (1,2,3) a la superficie en R^3 de ecuación $z = f(x,y)$ (siendo $f : R^2 \to R$ diferenciable) tiene ecuación $3x - 2y + 2z = 5$. ¿Cuánto vale $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$?
   b) Una función C^2 $z = f(x,y)$ tiene máximo relativo 3 en (1,2). Hallar una ecuación del plano tangente en (1,2,4) la superficie de ecuación $z = f(x,y) + x^2$
   c) Sea $f: R^2 \to R$ una función C^3 que satisface $\nabla f(1,2) = (1,0)$, y cuya matriz Hessiana en (1,2) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar a de manera que la función g(x,y) = f(x,y) + ax + (y – 2)^2 tenga extremo en (1,2). Qué tipo de extremo es?

5. Una mariposa ingrávida (es decir, sin peso) está posada en el punto (1/2, 0, -1/3) (en metros) y se deja llevar por el viento, que pasa por cada punto (x,y,z) con velocidad (z,x,0) (en metros sobre segundo). Hallar y dibujar aproximadamente la trayectoria de la mariposa.

Análisis II
Coloquio
08/07/03

1. Sea $F(x,y,z) = (P\ (x,y,z),5,\ \ R(x,y,z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset$ R^3 descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en D, calcular l circulación de $G(x,y,z)$ = (P(x,y,z), 3x , zR (x,y,z)) a lo largo de la curva de ecuaciones x^2 + y^2 = 4z = 1 en la dirección tal que la proyección sobre el plano x,y está positivamente orientada.

2. Sea $F(x,y,z) = (P\ (x,y,z),5,\ \ R(x,y,z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset$ R^3 descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en D, calcular, usando el teorema de la divergencia, el flujo de $G(x, y, z)$ = (x^3 + R (x, y, z), y^3 - P (x, y, z)z^3 - P(x, y, z)) sobre la esfera de ecuación x^2 + y^2 + z^2 =4, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

3. Sea $S \subset$ R^3 la superficie descripta por $x^2 + y^2 = x^2 + z^2 - 2z \leq 0$, $x \leq 0$, y ≤ 0. Hallar el flujo a través de S del campo $F\ x, y, z) = (x, y, z^2)$ con S orientada de manera que la coordenada y de su vector normal resulte positiva.

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

   a) Una función C^2 $\int$: R^2 → R satisface:

$$\frac{d}{dt}\left(f\left(1+t,\ 2-t\right)\right)(0) = 1$$
$$\frac{d}{dt}\left(f\left(1+t,\ 2+t\right)\right)(0) = 2$$

¿Cuánto vale $\nabla f\,(1,2)$?

b) Una función C^2 G (x, y,z) tiene máximo relativo 0 en (1,2,1). Hallar una ecuación del plano tangente en (1,2,3) a la superficie de ecuación $G(x, y, z) = 4x - y^2$.

c) Sea f: $R^2 \to R$ una función C^3 que satisface, y cuya matriz Hessiana en (1,2) es:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar todos los b ε R de manera que la función $g(x,y) = -\int(x,y) + (-1 + 1/b)(x-2)^2$ tenga extremo en (2,1). ¿Qué tipo de extremo es?

5. La fragancia de las rosas en un plano tiene intensidad $\int(x, y) = x^2 + 4y^2$. Una abeja acude presurosa tratando de llegar a su lado. Si parte del (2,1) y sigue, en cada punto, la dirección de máximo crecimiento de la fragancia, qué camino seguirá y en que punto alcanzará las rosas tan ansiadas que en x = 3 se encuentran alineadas?

Análisis II
Coloquio
08/07/03

1. Sea f:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2, y sea $F(x,y,z) = (\int_x^1 (x,z),\ 0,\ x + y + \int_z^1 (x,z))$. Calcular la circulación de F a lo largo de la curva cerrada definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y = 4$, orientada de manera que su vector tangente en (3,4,0) tenga coordenada z negativa.

2. Sea $F(x,y,z) = (xP(x,y,z), yP(x,y,z), zP(x,y,z)-2)$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 100$. Suponiendo que $\iiint_M \nabla.F\ dx\ dy\ dz = 3$, siendo $M \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ 4\sqrt{x^2 + y^2} = 3z$, hallar el flujo de a través del casquete esférico definido por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z \geq 1$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide descripto por $z = x^2 + y^2$, sea C el cilindro de radio 1 cuyo eje vertical pasa por (0,2,0), y sea II el plano tangente a S en el punto (0,2,4). Si I es la circunferencia intersección de C con el plano z=0, para cada $(x,y)\ \varepsilon$ I $(x,y,h(x,y))$ está en II, hallar el máximo valor de $h(x,y)$, $(x,y) \varepsilon$I. Mostrar gráficamente que el valor hallado es efectivamente un máximo.

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

   a) Sea F(x,y,z)= (,0,zR(x,y)) un campo vectorial C^2 en la región $D\subset R^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 <9$. suponiendo que el flujo de F a través del borde del cilindro definido por $x^2 + y^2<9$. suponiendo que el flujo de F a través del borde del cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$ es 3, calcular R(x,y) dxdy, siendo M el disco descripto en el plan xy por $x^2 + y^2 \leq 1$.

   b) Sean F,G : $R^3 \rightarrow R$ dos funciones C^2 tales que $\nabla f(0,1,2)$ y $\nabla g(0,1,2)$ no son colineales, de modo que las ecuaciones

$$F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$$

definen, en el entorno de (0,1,2), una curva C que pasa por (0,1,2).
Suponiendo que (1,-1,0) es tangente a C en (0,1,2), calcular el determinante jacobiano.

$$\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(0,1,2)\right|$$

   c) Una función C^3 f : $R^2 \rightarrow R$ tiene extremos en puntos P_1 y P_2. Calcular la circulación del campo ($(f''_{xx}(x,y), f''_{xx}(x,y))$ a lo largo del segmento que va desde P_1 hasta P_2.

5. Sabiendo que e^{-1}sen(t) es solución de la ecuación diferencial x'' + bx' + cx = 0, hallar b y c (en R), y encontrar todas las soluciones de x'' + bx' + cx = t que satisfacen x(0) = 1, x'(0) = 0.

Análisis II
Coloquio
08/07/03

1. Sea $F: \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ un campo vectorial C^2, que satisface $\nabla \times F = (0, y, 0)$. $\int(a,b)$ la circulación de F a lo largo del borde del rectángulo descripto por

   $$y = -a^2 + b^2 x \quad -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq z \leq 1$$

   orientado de manera que su tangente en $(0, -a^2, -1)$ tenga coordenada x positiva.
   Hallar el mínimo de $\int(a,b)$, $(a,b) \in \mathrm{R}^2$.

2. Sea F el campo vectorial definido para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Por

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-3x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \frac{-3y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \frac{-3z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \right)$$

- Calcular el flujo de F a través del borde de la región descripta por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, orientado con el normal hacia fuera.
- Calcular la divergencia de $F\,(x,y,z)$, para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$
- Usar lo anterior para calcular el flujo de F a través del borde de la región descripta por $5 \geq z \geq x^2 + y^2 - 5$, orientado con el normal hacia fuera.

3. Calcular el volumen de la región definida por $12\,x^2 - y^2 = z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

   a) Sea f: $R \to R$ una función continua tal que Calcular siendo $D \subset R^2$ el disco descripto por $x^2 + y^2 \leq 1/3$.
   b) Sea $f : R^2 \to R$ una función C^2. Sabiendo que $f(x,y)$ tiene máximo, de valor 0, en el punto (2,1), hallar a de manera que la superficie de ecuación $x^2 + 2y^2 = 6 + az$ sea perpendicular a la superficie de ecuación de ecuación $z = f(x,y)$ en (2,1,0).

5. Hallar a de manera que $1/x^3$ sea solución de la ecuación diferencial
$x^2y'' + axy' + 3y = 0, \qquad x > 0$

Hallar, con ese a, la solución general y una solución que satisfaga $y(1) = -2$, $y'(1)=6$.