*Problema 1*

Sea $x$ un número del intervalo $(0, \pi/2)$, tal que $tg\ 2x = tg\ x = 4/3$, determine $\cos x$ y $sen\ x$.

**Solución**

$tg(x)=4/3 \Rightarrow (\ sen(x)/\cos(x)) = 4/3 \Rightarrow 3.sen(x)= 4\cos(x) \Rightarrow \cos(x)=(3/4).sen\ (x)$

Por relaciones trigonométricas tenemos que:

$$sen\ x^2 + \cos\ x^2 = 1 \Rightarrow sen\ x^2 + \frac{3}{4} sen\ x^2 = 1$$

$$sen\ x^2 + \frac{9}{16} sen\ x^2 = 1 \Rightarrow 16.sen\ x^2 + 9\ sen\ x^2 = 16$$

$$25 sen\ x^2 = 16 \Rightarrow sen\ x^2 = \frac{16}{25}$$

$Sen\ x = \pm\frac{4}{5}$, como $0<x<\pi/2$, $sen\ x>0$, luego $sen\ x=\frac{4}{5}$.

Como $\cos x = \frac{3}{4} sen\ x \Rightarrow \cos x = \frac{3}{4}.\frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$ y $sen\ x = \frac{4}{5}$

*Problema 2*

A una cena de trabajo acudieron un grupo de colegas y se sentaron alrededor de una mesa ovalada. Unos siempre dicen la verdad y los otros siempre mienten. El camarero les pregunto, por turno, en que grupo se encontraba cada uno. Todos aseguraron ser de los que siempre dicen la verdad; al preguntarles de nuevo, ¿a que grupo pertenece su compañero de la derecha? todos contestaron que al de los que siempre mienten. Un periodista, al hacer la crónica de la reunión, pregunto a uno de los asistentes, que se llamaba Pedro, que cuantos asistieron, y contestó que 17. Como no sabia si decía la verdad o no, preguntó a otro asistente que afirmó que realmente eran 20 ya que Pedro era de los que siempre mienten. ¿Cuantos colegas asistieron a la cena?

**Solución**

Como todos dicen que el compañero de la derecha miente, deben estar intercalados uno que miente con uno que dice la verdad, y así sucesivamente. El número total debe ser par, por lo que asistieron 20. (Si fuera impar el número total habría 2 iguales sentados al lado).





*Problema 3*

Cinco amigos $a,b,c,d$ y $e$, demasiado ahorradores, se dieron cuenta de que si se pesaban de dos en dos, alternándose y sin que quede la báscula vacía, con una sola moneda, y obteniendo el peso de todas las parejas posibles, luego se baja A y sube C y así sucesivamente. los diez pesos de las 10 posibles parejas fueron: 134,139,126,127,138,144,121,135,140,152 .

Hallar el peso de cada uno de ellos.

**Solución**

Podría ser así: $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$, $e+a$, $a+c$, $c+e$, $e+b$, $b+d$, $d+a$

Si este es el caso: Sumo todas las cantidades y obtengo $4\cdot(a+b+c+d+e)=1356$

luego $a+b+c+d+e=339$.........(I)

Como $a+b+c+d=260 \Rightarrow e=79$

$b+c+d+e=266 \Rightarrow a=73$

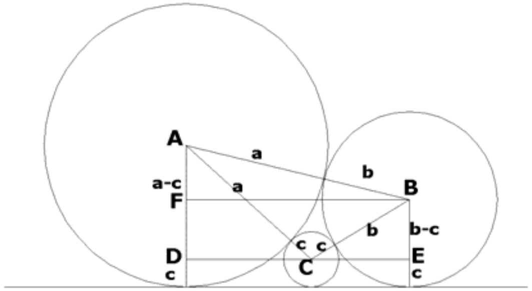
Luego $b+c+d=187 \Rightarrow d= 48$, $c=47$, $b=61$.

*Solución: Paco Moya*

*Problema 4*

Tres círculos de radios $a$, $b$ y $c$ $(a\geq b\geq c)$ son tangentes externamente entre si y también a una misma recta. ¿Cual es la relación entre sus radios?

**Solución**




En la figura adjunta, aplicamos el teorema de Pitágoras a los triángulos:

$ACD$: $(a + c)^2 = (a - c)^2 + DC^2 \Rightarrow$

$DC = 2\sqrt{a.c}$

$BCE$: $(b + c)^2 = (b - c)^2 + CE^2 \Rightarrow$

$CE = 2\sqrt{b.c}$

$ABF$: $(a + b)^2 = (a - b)^2 + DE^2 \Rightarrow$

$DE = 2\sqrt{a.b}$. Pero:

$$DE=DC+CE \Rightarrow \sqrt{a.b} = \sqrt{a.c} + \sqrt{b.c} = \sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{\sqrt{a.b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Rightarrow c = \frac{a.b}{a+b+2\sqrt{a.b}}$$

Hay una bonita fórmula que relaciona las curvaturas (inversas del radio) de cuatro círculos mutuamente tangentes en el plano (la recta se considera como un círculo de radio infinito y curvatura cero). Es $2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = (a' + b' + c' + d')^2$

O en general, para $(n + 2)$ hiperesferas mutuamente tangentes en el hiperespacio de dimensión $n$, $n(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + \dots) = (a' + b' + c' + d' + \dots)^2$ válida para $n \geq 1$. La fórmula en el plano se debe a Descartes, y la generalización a cualquier número de dimensiones a Soddy.

Aplicándola a este problema, tendríamos que $d' = 0$ (la recta) y $2(a'^2 + b'^2 + c'^2) = (a' + b' + c')^2$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado respecto de $c'$, $c' = a' + b' \pm 2\sqrt{a'.b'}$

Sustituyendo las curvaturas por los radios,

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \pm \frac{2}{\sqrt{a.b}}$$

$c_1 = \dfrac{a.b}{a + b + 2\sqrt{a.b}}$ (valor obtenido antes)

$$c_2 = \frac{a.b}{a + b - 2\sqrt{a.b}}$$

Esta segunda solución corresponde a una circunferencia, de radio mayor que $a$ y $b$, que es tangente a estas y a la recta, pero dejando a ambas circunferencias del mismo lado del punto de tangencia con la recta. Es decir, ahora sería la circunferencia de radio $b$ la situada entre las otras dos y la recta.

*Solución: Ignacio Larrosa Cañestro*

---

## *Problema 5*

Sea *ABCD* un cuadrado de lados *AB, BC, CD* y *DA*. Si *E* es el punto medio del lado *CD* y *M* es el punto interior del cuadrado tal que $\angle MAB = \angle MBC = \angle BME$, calcular la medida del ángulo $\angle MAB$.

*Fuente: Propuesto por Santiago*

### **Solución**

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el lado del cuadrado *ABCD* es 1.

Como ya te han dicho, el triángulo *AMB* es rectángulo en *M*, es decir, que *M* es un punto de la semicircunferencia de diámetro *AB*.

Como además $\angle BME = \angle MBC$ y *BC* es tangente a la semicircunferencia en *B*, se deduce que, *ME* es tangente a la semicircunferencia en *M*.

Si llamas *F* al punto medio de *AB*, por la tangencia anterior, se tiene que *FME* es un triángulo rectángulo, con lo que *M* es





un punto de la semicircunferencia de diámetro *FE*.

(Aunque no lo pida el ejercicio, lo anterior permite determinar gráficamente el punto *M*, como intersección de ambas semicircunferencias).

Utilizando coordenadas polares $(r, t)$, con centro en el punto *F*

Circunferencia de diámetro *AB*: $r = 1/2$

Circunferencia de diámetro *FE*: $r = \cos t \Rightarrow t = 60º$, pero $t = \angle EFM$, luego el ángulo $\angle EFM = 60º$.

Por otro lado, $\angle BFM = 90º + \angle EFM = 90º + 60º = 150º$, siendo este ángulo (150º) el ángulo central que abarca el arco de circunferencia *BM*.

A su vez, *BAM* es el ángulo inscrito en la circunferencia que abarca el mismo arco que el ángulo *BFM*, luego tiene que ser su mitad, a saber 75º.

*Solución: Diana*

---

## *Problema 6*

Una bandada de gorriones encuentra algunos postes. Si sobre cada poste se posa un gorrión, quedan *n* gorriones volando. Si todos los gorriones se paran sobre algún poste, de modo que queden *n* gorriones en cada poste ocupado, quedan *n* postes libres. Hallar las posibles cantidades de gorriones y de postes.

*Fuente: Propuesto por Miguel*

### **Solución**

Si la cantidad de postes es *P*, la de gorriones *G* y los postes libres o los gorriones en vuelo *N*, se tiene:

$G - P = N \Rightarrow G = N + P$.................. (I)

$P - G/N = N \Rightarrow G = NP - N^2$.......... (II)

De (I) y (II) se deduce:

$N + P = NP - N^2 \Rightarrow N^2 + (1-P)N + P = 0$

Los valores que satisfacen *N* son:

$$N = \frac{P - 1 \pm \sqrt{(P-1)^2 - 4P}}{2}$$

Que tiene solución entera si la expresión de la raíz es un cuadrado perfecto:

$(P-1)^2 - 4P = A^2 \Rightarrow P^2 - 6P + 1 = A^2$

Que tiene solución entera sólo para $P=0$ ó $P=6$.

Descartando $P=0$, para $P=6$ hay dos valores de *N*, que son 3 y 2.

Los postes sólo pueden ser 6, los gorriones 8 ó 9.

*Solución: Daniel*

---

## *Problema 7*

Viajando en la combi (medio de transporte que usamos los que no tenemos coche), se me ocurrió el siguiente problema,

Hallar un número de 5 cifras que sea igual a 45 veces el producto de sus cifras.

*Fuente: Una locura de Aldo Gil C.*





***Solución***

No se si el subconsciente me lo ha traído a la mente (recuerdo) o se me antojo, pero estuve cavilando la solución si la tiene, y hasta ahora descubrí lo siguiente:

$\overline{abcde} = 45*a*b*c*d*e$

Por el lado derecho, el número es múltiplo de 5, por lo tanto termina en cero o cinco. Es obvio que no puede terminar en cero, luego $e=5$

Queda así: $\overline{abcd5} = 9*5*5*a*b*c*d$

Evidentemente es múltiplo de 25, luego $d$ es 2 ó 7. ¿Esta bien?

Vemos que como el número termina en 5, ninguna cifra es par, luego $d$ no puede ser 2, entonces es 7

Queda así: $\overline{abc75} = 9*5*5*7*a*b*c$

Asumimos los máximos valores de $a,b$ y $c$ que son 9, luego $a+b+c+d+e \leq 9+9+9+7+5 \leq 39$

Luego $a+b+c+d+e \leq 36$,debido a que el número es múltiplo de 9 ¿ok?

De aquí:

$a+b+c+7+5= 36 \Rightarrow a+b+c = 24$

$a+b+c+7+5= 27 \Rightarrow a+b+c = 15$

$a+b+c+7+5= 18 \Rightarrow a+b+c = 6$

$a+b+c+7+5= 9$ (imposible)

Aquí viene lo simpático, $a+b+c$ par, implica que uno de ellos sea una cifra par, lo cual hace que el lado derecho sea par, y eso no es posible (debido a que el número termina en cifra impar).

Luego la única opción es que $a+b+c = 15$

La única solución es 77175. La condición de que sea múltiplo de 7 se traduce en que $\overline{c75} - \overline{ab}$ sea múltiplo de 7. Por otra parte, dos de los $a$, $b$ y $c$ deben ser mayores o iguales que 3 o uno mayor o igual que 7, para que el producto tenga cinco cifras. Entre esto, y que $a + b + c = 15$, no parece que sea demasiado complicado agotar todas las posibilidades.

*Solución: Ignacio Larrosa Cañestro en complicidad con Aldo Gil*

*Problema 8*

Las diagonales $AC$ y $BD$ de un cuadrilátero convexo $ABCD$ son perpendiculares. Por los puntos medios de $AB$ y $AD$ se trazan las perpendiculares a los lados opuestos correspondientes $CD$ y $BC$. Demostrar que estas líneas se intersecan en un punto sobre $AC$.

*Fuente: Problema 1 – New Zeland Olympiad - 1998*

***Solución***

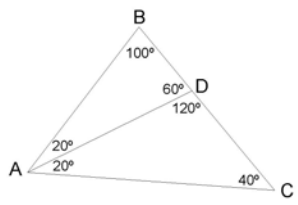
Sean $M$, $N$, y $K$ los puntos medios de $AB$, $AC$, y $AD$ respectivamente. Entonces los lados $MN$, $NK$, $KM$ del triángulo $MNK$ son paralelos a $BC$, $CD$ y $BD$ respectivamente. Por lo tanto las dos líneas perpendiculares trazadas y *AC* son prolongaciones de las alturas del triángulo *MNK* y se cortan en el ortocentro.

*Problema 9*

*ABC* es un triángulo isósceles con $\angle A$ = 100º y *AB* = *AC*. La bisectriz del ángulo *B* corta a *AC* en *D*. Demostrar que *BD* + *AD* = *BC*

*Fuente: 1988-1999 Olympiad Correspondence Problems Set 1*

**Solución**




De la figura sea $|AB| = u$.

Entonces: $|BD|+|AD|=\dfrac{u\,sen100º}{sen60º}+\dfrac{u\,sen20º}{sen60º}$

$|BD|+|AD|=\dfrac{u}{sen60º}(sen100º+sen20º)$

$=\dfrac{2u\,sen60º\cos40º}{sen60º}=2u\cos40º=|BC|$

*Problema 10*

Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación: $x^4 = y^2 + 71$

**Solución**

De la ecuación: $x^4 = y^2 + 71$, nosotros obtenemos:

$(x^2 - y)(x^2 + y) = 71.1$

Como 71 es primo obtenemos:

$I \begin{cases} x^2 - y = 1 \\ x^2 + y = 71 \end{cases}$, ó $II \begin{cases} x^2 - y = 71 \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$

Lo que resulta: $2x^2 = 72$, entonces: $x = 6$.

Reemplazando $6^4 = y^2 + 71$, y despejando $y = 35$.